Systèmes Différentiels

1 – Généralités :

Définition :

1°) On considère un système différentiel linéaire à coefficients constants sans second membre, c'est-à-dire un système de la forme : (S) $\begin{cases} x_1' = a_{1,1}.x_1 + \ldots + a_{1,n}.x_n \\ \vdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \vdots \\ x_n' = a_{n,1}.x_1 + \ldots + a_{n,n}.x_n \end{cases}$

Où les $a_{i,j}$ sont des constantes données et où $x_1,\ldots,x_n$ sont n fonctions inconnues d'un intervalle de I dans K. Une solution de (S) est la donnée de n fonctions $x_1,\ldots,x_n$ de I dans K pour lesquelles (S) est vérifié.

2°) Ecriture matricielle de (S) :

On pose $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(K)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Alors $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ et (S) $\leftrightarrow X' = A.X$

Propriété : (Théorème de Cauchy)

En reprenant les notations précédentes, $\forall\ t_0 \in I$, $\forall\ X_0 \in K^n$, il existe une et une seule solution du système (S) : $I \to K^n$, $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ vérifiant la condition initiale : $X(t_0) = X_0$.

Corollaire : (Structure de l'ensemble des solutions)

L'ensemble des solutions sur un intervalle I de (S) est un K-espace vectoriel de dimension n.

2 – Résolution pratique dans le cas où A est diagonalisable :

Exercice :

Intégrer le système différentiel (S) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = +x - y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = -x - y + z \end{cases}$

On reconnaît un système différentiel linéaire à coefficients constants de 3 équations à 3 inconnues. Donc l'ensemble s des solutions de (S) est un espace vectoriel de dimension 3.

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors (S) $\leftrightarrow \frac{dX}{dt} = A.X$

A étant une matrice symétrique réelle, est diagonalisable sur R et après quelques calculs, on trouve :
$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $A' = P^{-1}.A.P$, en prenant par exemple $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On se place sur la nouvelle base de vecteurs propres définie par P. On pose $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ les nouvelles coordonnées de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans cette base. On a : X = P.X '

Dans la nouvelle base, le système s'écrit : $\begin{pmatrix} \frac{dX}{dt} \\ \frac{dY}{dt} \\ \frac{dZ}{dt} \end{pmatrix} = A'.\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

Donc : (S) $\leftrightarrow \begin{cases} \frac{dX}{dt} = 2.X \\ \frac{dY}{dt} = 2Y \\ \frac{dZ}{dt} = -Z \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} X = \lambda.\exp(2.t) \\ Y = \mu.\exp(2.t) \\ Z = \nu.\exp(-t) \end{cases}$, $(\lambda,\mu,\nu) \in R^3$.

On revient ensuite à la base initiale. X = P.X '. D'où finalement la solution générale du système :

$$\begin{cases} x(t) = (\lambda + \mu).\exp(2.t) + \nu.\exp(-t) \\ y(t) = -\lambda.\exp(2.t) + \nu.\exp(-t) \\ z(t) = -\mu.\exp(2.t) + \nu.\exp(-t) \end{cases}$$

3 – Résolution dans le cas où K = R et où A est diagonalisable sur C mais pas sur R :

Exercice :

Etude du système différentiel (S) : $\begin{cases} y'_1 = y_1 + y_2 \\ y'_2 = -2y_1 + y_2 \end{cases}$ sur R.

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = A.\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

On diagonalise A sur C : $A' = \begin{pmatrix} 1+i.\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-i.\sqrt{2} \end{pmatrix} = P^{-1}.A.P$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Finalement, comme dans le précédent exercice, on arrive à :

$$\begin{cases} y_1 = \lambda.\exp[(1+i\sqrt{2}).x] + \mu.\exp[(1-i\sqrt{2}).x] \\ y_2 = i.\sqrt{2}.\lambda.\exp[(1+i\sqrt{2}).x] - i.\sqrt{2}.\mu.\exp[(1-i\sqrt{2}).x] \end{cases}$$

Cependant on ne peut se satisfaire de ce résultat vu que l'on cherche les solutions sur R.

En posant $Z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, on a : $Z = \lambda.Z_1 + \mu.Z_2$, avec $Z_1 = \begin{pmatrix} \exp[(1+i.\sqrt{2})x] \\ i.\sqrt{2}.\exp[(1+i.\sqrt{2})x] \end{pmatrix}$ et $Z_2 = \overline{Z_1}$.

Ainsi, $(Re(Z_1), Im(Z_1))$ est une base de s_R.

D'où la solution générale sur R :

$$\begin{cases} y_1 = \exp(x).\left(\lambda.\cos(\sqrt{2}.x) + \mu.\sin(\sqrt{2}.x)\right) \\ y_2 = \exp(x).\sqrt{2}.\left(-\lambda.\cos(\sqrt{2}.x) + \mu.\sin(\sqrt{2}.x)\right) \end{cases}$$

© Archi 2002
http://www.prepasciences.com